第16講　式と証明(1)

【基礎確認事項】

［1］　除法の原理

□ $7\div 2$ の結果は商3，余り1である．これを式で表すと　$7\div 2=\dfrac{7}{2}=3+\dfrac{1}{2}$ と表され，さらに　$7=2\times 3+1$ と表される．つまり　(割られる数)＝(割る数)×(商)＋(余り)　である．つまり，次のことがいえる．

　正の整数 n，m に関して，

$$n=mq+r \quad (0\leqq r<m)$$

　を満たす q，r がただ1つ存在し，このときの q が商，余りが r である．

$r=0$ のときは割り切れる．

□同様に，次の**除法の原理**が成り立つ．

> 整式 A を整式 B で割ったときの商を Q，余りを R とすると
>
> $A=BQ+R$　　（R の次数は B の次数より低い）
>
> とただ1通りに表される．$R=0$ のときは割り切れる．

例　$(2x^2+7x+9)\div(x+2)$ の商と余りを求める．

$$x+2\,\overline{)\,2x^2+7x+9} \Longrightarrow \begin{array}{r} 2x \\ x+2\,\overline{)\,2x^2+7x+9} \\ 2x^2+4x \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 2x \\ x+2\,\overline{)\,2x^2+7x+9} \\ \underline{2x^2+4x} \\ 3x+9 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{r} 2x+3 \\ x+2\,\overline{)\,2x^2+7x+9} \\ \underline{2x^2+4x} \\ 3x+9 \\ 3x+6 \end{array}$$

$(x+2)\times 2x=2x^2+4x$　　　$(x+2)\times 3=3x+6$

$$\Longrightarrow \begin{array}{r} 2x+\ 3 \\ x+2\,\overline{)\,2x^2+7x+9} \\ \underline{2x^2+4x} \\ 3x+9 \\ \underline{3x+6} \\ 3 \end{array}$$

↑ 1次　　↖ 定数(0次)

商　$2x+3$　　　余り　3

以上の結果より　$2x^2+7x+9=(x+2)(2x+3)+3$　と表される．

⇒　C&U 1

［2］　剰余の定理・因数定理・組立除法

□ x についての整式 $P(x)$ を $G(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ と表すと，［1］で学んだように

$$P(x)=G(x)\cdot Q(x)+R(x) \qquad (R(x)\text{ の次数}<G(x)\text{ の次数})$$

と表される．

□ここで $G(x)$ を1次式 $ax+b$ とすれば

$$P(x)=(ax+b)\cdot Q(x)+R \qquad (R\text{ は定数})$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

と表される.

□ここで $x=-\dfrac{b}{a}$ をこの式の両辺に代入すると，$ax+b=0$ となるので

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=R$$

となり，結果的にもとの式に $x=-\dfrac{b}{a}$ を代入することで余り R が得られることとなる.

これを**剰余の定理**という．この結果は $G(x)$ が1次式を因数にもつときの余りを求めることに利用される.

□また，$P(x)$ が $ax+b$ で割り切れるならば $P(x)=(ax+b)\cdot Q(x)$ と表され，剰余の定理により $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$ となる．これを**因数定理**という.

□逆に $P\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$ ならば $P(x)$ は $ax+b$ を因数にもつ，つまり $P(x)=(ax+b)\cdot Q(x)$ の形で表すことができる．よって，代入して式の値を0にする数 $-\dfrac{b}{a}$ がわかれば，$ax+b$ で割ることによって商を求め，因数分解することができる.

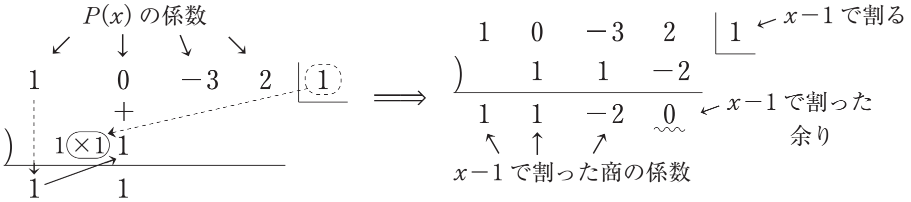
□しかしながら除法にはしばしば時間を要する．ここでは「**組立除法**」を紹介しよう.

例　$P(x)=x^3-3x+2$ を因数分解するとき，

$\dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の係数の約数}}$ を考える（定数項の約数には負も含めるとする）

今回の式においては ±1，±2 である．これが　$P(x)=0$ の有理数解の候補である.

$x=1$ とし，以下の計算を行う.



よって　$P(x)=(x-1)(x^2+x-2)$ と因数分解され，さらに進めると $(x-1)^2(x+2)$ と因数分解することができる．後述の「高次方程式」（第17講［2］）の解法の1つとして利用できる.

ちなみに $x=-1$ で組立除法を実行すると余りが4となり，

$P(x)=(x+1)(x^2-x-2)+4$ となる．よって $P(-1)=4$ である.

組立除法はこのように式の値を求めるときにも利用できる．その際は因数分解した式は必要ない．代入した後の累乗計算が必要ないため，代入する値によっては解法の選択肢として利用できる.

⇒　C&U ②

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［3］ 分数式

□整式 A と，定数でない整式 B で，$\dfrac{A}{B}$ の形で表される式を**分数式**という．その分母と分子に 0 以外の同じ数や式を掛けても割っても，式の値は不変である．

□分母と分子に共通因数がなくそれ以上約分できない式を**既約分数式**という．

□分数式の四則を行う際は，分母・分子それぞれを因数分解することを常に念頭において計算を進め，その上で約分や通分を実施するとよい．

⇒ C&U 3

［4］ 恒等式

□ある文字（変数）に関する等式で，その文字にどのような値を代入しても成立するとき，この式を**恒等式**という．これに比較し，特定の値のみで成立する式を方程式という．

例 $2x^2+7x+9=(x+2)(ax+b)+c$ が x についての恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めることを考える．$2x^2+7x+9$ を $x+2$ で割った商と余りを求める方法もあるが，ここでは別の方法をとる．

①係数比較法

等式の右辺を計算し，x について整理すると　$ax^2+(2a+b)x+2b+c$　である．両辺の x に関する次数が同じ項の係数を比較すると

$a=2$, $2a+b=7$, $2b+c=9$　　よって　$a=2$, $b=3$, $c=3$ である．

ちなみに，右辺を見ると x の最高次である x^2 の係数は a であり，これを左辺の x^2 と比較することで $a=2$ であることがわかる．

②数値代入法

ある式が x の n 次式のとき，$n+1$ 個の異なる x の値に対して成り立つならば，その式は x についての恒等式である．x の 2 次式においては，3 個の異なる値に対して成り立てばその式は恒等式となる．

$x=-2$ で成り立つので　$3=c$　　$x=0$ で成り立つので　$9=2b+c$

$x=1$ で成り立つので　$18=3a+3b+3c$

よって　$a=2$, $b=3$, $c=3$ である．

⇒ C&U 4

［5］ 等式の証明

□等式 $A=B$ が常に成り立つ，つまり恒等式であることの証明の主な方法は以下．

① A を計算して B になる，または B を計算して A になる

② $A=C$, $B=C$ より $A=B$

③ $A-B$ を計算して 0 になる

⇒ C&U 5

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[6]　不等式の証明

□等式における恒等式と同様，常に成り立つ不等式を**絶対不等式**という．

例　$x^2-4x+5>0$ は左辺が $(x-2)^2+1$ より常に1以上，よって0より大きい．したがって $x^2-4x+5>0$ は絶対不等式である．

これに対し $x^2-5x-6>0$ は $x<-1$，$6<x$ のときのみ成立する．このような不等式を，条件付き不等式という．

$x<-1$ または $6<x$ である x に対して $x^2-4x+5>0$ は常に成立する．

□証明したい不等式 $A>B$ が絶対不等式，条件付き不等式に関わらず，基本は

$A-B$ を計算して「>0」すなわち「0より大きい」

ことを示す．そこでは数値的に0より大きいことと同時に，「正」という符号的アプローチや，グラフによる判断を必要とする．

例　$x^2-4x+5>0$ の証明についても，

$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ のグラフは下に凸の放物線で頂点は $(2,\ 1)$

よってこのグラフはすべて x 軸，すなわち $y=0$ より上であるので

$(x-2)^2+1>0$

といったように，グラフを用いた証明などが考えられる．

□証明を進める上で利用する主な性質について以下に列挙する．

- 実数 a について，$a^2\geqq 0$（等号成立は $a=0$ のとき）
  実数 a，b について，$a^2+b^2\geqq 0$（等号成立は $a=b=0$ のとき）
- 実数 a について　$|a|\geqq 0$，$|a|^2=a^2$，$|a|\geqq a$，$|ab|=|a||b|$
- $A>0$，$B>0$ のとき，$A>B \iff A^n>B^n$　（n は正の整数）
- （相加平均）$\geqq$（相乗平均）
  $a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$
  すなわち　$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$（等号成立は $a=b$ のとき）
- シュワルツの不等式　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqq(ac+bd)^2$（等号成立は $ad=bc$ のとき）
- 三角不等式　$|a|-|b|\leqq|a+b|\leqq|a|+|b|$

代表的な問題を通じてその手法を徐々に学ぶことが重要である．

⇒　C&U ⑥

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［7］　複素数

□平方すると -1 になる新しい数を新たに考え，これを文字 i で表す．つまり

$$i^2=-1$$

と定義する．

□また実数 a が $a>0$ のとき　$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　と定義する．

特に，$a=1$ のとき　$\sqrt{-1}=i$ となる．

□この i を虚数単位という．

□これにより，$a>0$ のとき負の数 $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{a}\,i$ となる．

□ここで a，b を実数として $\boldsymbol{a+bi}$ の形で表される新しい数を**複素数**という．

□この複素数 $a+bi$ において　a を**実部**，b を**虚部**という．

　$b=0$ のとき　複素数 $a+bi$ は a となり，これは実数である．

　$b\neq0$ のとき　複素数 $a+bi$ を**虚数**という．特に $a=0$ のときの bi を**純虚数**という．

> a，b，c，d が実数のとき
>
> $a+bi=c+di \iff a=c$ かつ $b=d$　　　$a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

□加法，減法，乗法においては，虚数単位 i を文字と見立てて計算することができる．途中，$i^2=-1$ とする．結果，実部と虚部のそれぞれでまとめることとなる．

□複素数 $a+bi$ と $a-bi$ を互いに**共役な複素数**（共役複素数）という．$a+bi=z$ とおくと，$a-bi=\bar{z}$ と表すことができる．

□このとき

$$z+\bar{z}=(a+a)+(b-b)i=2a \qquad z\bar{z}=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$$

より共役複素数の和，積は実数となる．

□除法については，分母が虚数の場合はそれと共役な複素数を分母，分子に掛けて分母を実数にする．

□虚数には大小関係の概念がない．複素数の更なる性質については「複素数平面」で扱われる．

⇒　C&U 7

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1　整式 $5x^4-7x^2+x$ を x^2-1 で割った商と余りを求めよ．

2　(1)　整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りが -6，$x-2$ で割ったときの余りが -4 であるとき，$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ．

(2)　組立除法を用いて $x^3-6x^2+5x+12$ を因数分解せよ．

3　次の計算をせよ．

(1)　$\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2-x-2}$

(2)　$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}}}$

4　(1)　等式 $x^2-x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ が x の恒等式になるように，定数 a，b，c を係数比較法と数値代入法により定めよ．

(2)　すべての実数 k の値に対して，常に等式 $(2k+3)x+(2-3k)y+k-5=0$ が成り立つように，x，y の値を定めよ．

5　(1)　$a+b+c=0$ のとき $a^3+b^3+c^3=-3(a+b)(b+c)(c+a)$ を証明せよ．

(2)　$abc=1$ のとき $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=1$ を証明せよ．

6　次の不等式が成り立つことを証明せよ．

(1)　$(x+y)^2\geqq 4xy$

(2)　$10x^2+y^2-6xy+4x+4\geqq 0$

(3)　$a>0$，$b>0$ のとき $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

7　複素数 $\dfrac{1+ai}{3+i}$ が

(1)　実数　　　　(2)　純虚数

となるような実数 a の値をそれぞれ求めよ．ただし，i は虚数単位である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 16 講　式と証明(1)

1 ［1］ $\dfrac{1}{n(n-2)}+\dfrac{1}{(n-2)(n-4)}+\dfrac{1}{(n-4)(n-6)}$ を計算せよ.

［2］ 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}-\dfrac{x^2+5x+8}{x+3}$

(2) $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 実数 a，b，c について $a+b+c=0$ のとき，

等式 $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+3=0$ が成り立つことを証明せよ．

［2］ 次の不等式が成り立つことを証明せよ．ただし，使われている文字はすべて実数とする．

(1) $a>b>0$，$c>d>0$ のとき，$ac>bd$

(2) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$

(3) $|x+y|\leqq|x|+|y|$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 (1) $x>0$ のとき，$x+\dfrac{4}{x+1}$ の最小値を求めよ．

(2) x^{11} を x^2+x+1 で割った余りを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 16 講　式と証明(1)

(1)　$\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{(x-\boxed{\text{イ}})(x+\boxed{\text{ウ}})}$ である.

(2)　$a>0$，$b>0$ のとき　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ の最小値は $\boxed{\text{エ}}$ である.

(3)　$x=1-\sqrt{7}\,i$ のとき，$x^3-4x^2+12x-15$ の値を求めたい．$x-1=-\sqrt{7}\,i$ よりこの式の両辺を 2 乗し，x について整理すると $x^2-\boxed{\text{オ}}\,x+\boxed{\text{カ}}=0$ であり，$x=1-\sqrt{7}\,i$ はこの式を満たす.

　ここで $x^3-4x^2+12x-15=(x^2-\boxed{\text{オ}}\,x+\boxed{\text{カ}})(x-\boxed{\text{キ}})+\boxed{\text{ク}}$ であることより，$x^3-4x^2+12x-15=\boxed{\text{ケ}}$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　式と証明(1)

【CHECK & UP】

1

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x^2 \quad -2 \\
\hline
x^2-1 & 5x^4 \quad -7x^2+x \\
 & \underline{5x^4 \quad -5x^2} \\
 & \qquad -2x^2+x \\
 & \qquad \underline{-2x^2 \qquad +2} \\
 & \qquad\qquad x-2
\end{array}
$$

項のないところは「空白」を補っておくとよい．

商　$5x^2-2$　　余り　$x-2$

2 (1)　整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りが -6 であることより

$P(x)=(x+1)\cdot Q_1(x)-6$　とおける．

よって　$P(-1)=-6$　……①

整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りが -4 であることより

$P(x)=(x-2)\cdot Q_2(x)-4$　とおける．

よって　$P(2)=-4$　……②

整式 $P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割った余りを $ax+b$ とおくと，

$P(x)=(x+1)(x-2)\cdot Q(x)+ax+b$　と表せる．

①より　$-a+b=-6$　　②より　$2a+b=-4$

よって　$a=\dfrac{2}{3}$，$b=-\dfrac{16}{3}$　　したがって求める余りは　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}x-\dfrac{16}{3}}$

商は不明であるため，自分でおく必要がある．複数設定する必要がある場合は $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ などと序数をつけるとよい．

整式を2次式で割った余りは1次式以下である．$a=0$ のときは定数．

(2)

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & -6 & 5 & 12 & -1 \\
 & -1 & 7 & -12 & \\
\hline
1 & -7 & 12 & 0 &
\end{array}
$$

$x^3-6x^2+5x+12=0$ の有理数解の候補は
$x=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm6,\ \pm12$　である．
今回は $x=-1$ で組立除法を行ったが，$x=3,\ 4$ でも余りは0となる．

よって　$x^3-6x^2+5x+12=(x+1)(x^2-7x+12)=\boldsymbol{(x+1)(x-3)(x-4)}$

3 (1)

$$
\frac{2}{x^2-1}-\frac{3}{x^2-x-2}
$$
$$
=\frac{2}{(x+1)(x-1)}-\frac{3}{(x+1)(x-2)}
$$
$$
=\frac{2(x-2)-3(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{-(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}
$$
$$
=\boldsymbol{-\frac{1}{(x-1)(x-2)}}
$$

分母の共通因数を見つけるのは，数字のみの分数における最小公倍数を見つけるのに似ている．

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{\underline{2}\cdot2}-\frac{1}{\underline{2}\cdot3}=\frac{3-2}{\underline{2}\cdot2\cdot3}=\frac{1}{12}$$

においては，4と6の最小公倍数が2であることを利用している．

(2)

$$
\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}}}=\frac{1}{1-\dfrac{1\times(x+1)}{\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)\times(x+1)}}=\frac{1}{1-\dfrac{x+1}{(x+1)-1}}
$$
$$
=\frac{1}{1-\dfrac{x+1}{x}}=\frac{1\times x}{\left(1-\dfrac{x+1}{x}\right)\times x}=\frac{x}{x-(x+1)}=\frac{x}{-1}=\boldsymbol{-x}
$$

繁分数の計算においては，分母にあたる部分を部分的に計算し，逆数にして掛け算に直す方法もある．ここでは分母と分子に同じ因数を掛けても同値であることを利用した．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4　(1)　（係数比較法）

$a(x-1)^2+b(x-1)+c=ax^2-2ax+a+bx-b+c$

$=ax^2+(-2a+b)x+a-b+c$

これを x^2-x+1 と係数比較して，$a=1$，$-2a+b=-1$，$a-b+c=1$

したがって，$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=1}$，$\boldsymbol{c=1}$

（数値代入法）

両辺に $x=1$ を代入して　$1=c$

$x=0$ を代入して　$1=a-b+c$

$x=2$ を代入して　$3=a+b+c$

以上より，$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=1}$，$\boldsymbol{c=1}$

このとき x の 2 次式が 3 つの値で成立するので，与えられた等式は恒等式となる．

> 恒等式になるためには，x にある特定の値を入れたときに成立することが「必要」である．ただし，n 次の等式が n 個の値で成立するだけではその値は「方程式の解」にすぎない．よって $n+1$ 個以上の値で成立すれば「十分」である．左の例では 2 次式に対して 3 個の値で成立するので恒等式となるが，もし 3 次式であったならば，恒等式になるかを確かめる必要がある．

(2)　与式を k について整理すると

$(2x-3y+1)k+(3x+2y-5)=0$

これがすべての実数 k の値で成立するのは，

$2x-3y+1=0$　かつ　$3x+2y-5=0$　のときである．

よって　$\boldsymbol{x=1}$，$\boldsymbol{y=1}$

> 「x，y に関する 1 次式」を，ある文字に関する恒等式にするという作業は今後も出てくる．その代表例として，文字（変数）の値に関わらず「直線」が必ず通る点（定点）が挙げられる．つまり今回は，与えられた直線が k の値に関わらず必ず定点 $(1,\ 1)$ を通ることを表している．

5　(1)　$a+b+c=0$ より　$c=-a-b$

このとき　$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3+(-a-b)^3$

$=a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3=-3a^2b-3ab^2$

$-3(a+b)(b+c)(c+a)=-3(a+b)(b-a-b)(-a-b+a)$

$=-3(a+b)(-a)(-b)=-3a^2b-3ab^2$

したがって　$a^3+b^3+c^3=-3(a+b)(b+c)(c+a)$

【別解】　$a+b+c=0$ より

$a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$

このとき　(左辺)−(右辺)

$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

したがって　(左辺)＝(右辺) である．

> 条件式により文字の個数を減らすのが基本である．等式の証明は，左辺と右辺が「必ず等しくなる」とわかっているので，計算さえ乗り切ればさほど難易度は高くないものが多い．しかし，今回の問題のように「対称形」であるものは工夫することによりその計算量を減らすことができるものもある．

(2)　$abc=1$ より $a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$　　よって　$ab=\dfrac{1}{c}$，$bc=\dfrac{1}{a}$ を左辺に代入すると

$$(\text{左辺})=\frac{a}{\frac{1}{c}+a+1}+\frac{\frac{1}{ac}}{\frac{1}{a}+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$=\frac{ac}{1+ac+c}+\frac{1}{c+abc+ac}+\frac{c}{ca+c+1}$$

$$=\frac{ca}{ca+c+1}+\frac{1}{ca+c+1}+\frac{c}{ca+c+1}=\frac{ca+c+1}{ca+c+1}=1$$

よって　(左辺)＝(右辺)である．

【別解】 $\dfrac{a}{ab+a+1}=\dfrac{ac}{abc+ac+c}=\dfrac{ac}{ca+c+1}$

$\dfrac{b}{bc+b+1}=\dfrac{ab}{abc+ab+a}=\dfrac{ab}{ab+a+1}$

$=\dfrac{abc}{abc+ac+c}=\dfrac{1}{ca+c+1}$

よって　(左辺)$=\dfrac{ca}{ca+c+1}+\dfrac{1}{ca+c+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=\dfrac{ca+c+1}{ca+c+1}=1$

したがって　(左辺)＝(右辺) である．

> (2)の別解においては「分母と分子に同じものを掛けても元と等しい」ことを利用し，abc の形をつくりそれを 1 とした．分母は $ab+a+1$，$bc+b+1$，$ca+c+1$ をループするのが特徴である．
> また，今回は異なるが「1 を abc に置き換える」ということもある．1 は文字の係数としては目に見えないので注意．

6 (1)　$(x+y)^2-4xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geqq 0$

よって　$(x+y)^2\geqq 4xy$

等号成立は $x=y$ のときである．

> (1)　不等式の証明の基本は「差をとること」である．また，「等号成立」のための条件は，単に「証明せよ」であれば必ずしも必要ではない．それは，「□$\geqq 0$」を示すとは「□>0 または □$=0$」を示すことであり，□$=0$ になる必要がないからである．しかしながら証明問題，という枠を越えれば，不等式において等号の成立するときが問題解決の重要な要素を握っている問題も多いため，等号が成立するときの条件を出す練習を欠かすことはできない．

(2)　$10x^2+y^2-6xy+4x+4$

$=10x^2-2(3y-2)x+y^2+4$

$=10\left(x-\dfrac{3y-2}{10}\right)^2-\dfrac{1}{10}(3y-2)^2+y^2+4$

$=10\left(x-\dfrac{3y-2}{10}\right)^2+\dfrac{1}{10}y^2+\dfrac{12}{10}y+\dfrac{36}{10}$

$=10\left(x-\dfrac{3y-2}{10}\right)^2+\dfrac{1}{10}(y+6)^2\geqq 0$

よって　$10x^2+y^2-6xy+4x+4\geqq 0$

等号成立は　$x=\dfrac{3y-2}{10}$ かつ $y=-6$　つまり　$x=-2$，$y=-6$ のときである．

> (2)　左の例では 2 次式であることを利用して，「x についての降べきの順」→「x について平方完成」→「y について平方完成」→「$\geqq 0$」という流れ．もちろん最初に「y について降べきの順」を選択する方法もあり，今回の問題は実はその方が若干計算が楽になる．
> 　今回は完全平方式の形となったが，もし平方完成して正の数が余ってしまう場合は，等号（$=0$）が成立しないということである．

(3)　$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}(a-2\sqrt{ab}+b)$

$=\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2\}$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqq 0$

よって，$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$　　等号成立は $a=b$ のときである．

> 有名な「相加平均≧相乗平均」の証明である．$\sqrt{\quad}$ をはずすために，(左辺)^2－(右辺)^2 を計算する方法もあるが，今回はそれを行わずに証明した．2 乗する場合は「両辺が正」であることをどこかで断る必要がある．もちろん左の解法も $a>0$ だからこそ $a=(\sqrt{a})^2$ であるが．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

7　$\dfrac{1+ai}{3+i}=\dfrac{(1+ai)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{3-i+3ai-ai^2}{9-i^2}=\dfrac{a+3+(3a-1)i}{10}$

$=\dfrac{a+3}{10}+\dfrac{3a-1}{10}i$　……①

a は実数より，$\dfrac{a+3}{10}$，$\dfrac{3a-1}{10}$ も実数である．

a，b が実数のときに，複素数 $a+bi$ を見ると必ず虚数単位「i」が含まれるように思えるが，$b=0$ のときは実数 a のみとなる．$b\neq0$ のときは「i」が残り，そのとき複素数は「虚数」となる．複素数と虚数を混同しないように．

(1)　①が実数となるのは　$\dfrac{3a-1}{10}=0$　つまり　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{3}}$ のときである．

(2)　①が純虚数となるのは　$\dfrac{a+3}{10}=0$　かつ　$\dfrac{3a-1}{10}\neq0$　である．

$\dfrac{a+3}{10}=0$ より $a=-3$　これは $\dfrac{3a-1}{10}\neq0$ を満たす．

よって　$\boldsymbol{a=-3}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　式と証明(1)

1 [1]　$\dfrac{1}{n(n-2)}+\dfrac{1}{(n-2)(n-4)}+\dfrac{1}{(n-4)(n-6)}$ を計算せよ．

$$\frac{1}{n(n-2)}+\frac{1}{(n-2)(n-4)}+\frac{1}{(n-4)(n-6)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-6}-\frac{1}{n-4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-6}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-(n-6)}{(n-6)n}=\boldsymbol{\frac{3}{n(n-6)}}$$

1 [2]　次の計算をせよ．

(1)　$\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}-\dfrac{x^2+5x+8}{x+3}$　　(2)　$\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$

(1)　$\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}-\dfrac{x^2+5x+8}{x+3}$
$$=x+2+\frac{2}{x+2}-\left(x+2+\frac{2}{x+3}\right)$$
$$=\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x+3}$$
$$=2\cdot\frac{x+3-(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\boldsymbol{\frac{2}{(x+2)(x+3)}}$$

(2)　$\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$
$$=1+\frac{-1}{x+2}-\left(1+\frac{-1}{x+3}\right)-\left(1+\frac{-1}{x+4}\right)+\left(1+\frac{-1}{x+5}\right)$$
$$=-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}$$
$$=\frac{-(x+3)+x+2}{(x+2)(x+3)}+\frac{x+5-(x+4)}{(x+4)(x+5)}$$
$$=-\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$$
$$=\frac{-(x+4)(x+5)+(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$
$$=-\frac{4x+14}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}=\boldsymbol{-\frac{2(2x+7)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］　実数 a，b，c について $a+b+c=0$ のとき，
等式 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$ が成り立つことを証明せよ．

$$(\text{左辺})=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3$$

$$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+3$$

$$=-1-1-1+3=0$$

よって　$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$

2 ［2］　次の不等式が成り立つことを証明せよ．ただし，使われている文字はすべて実数とする．
(1)　$a>b>0$，$c>d>0$ のとき，$ac>bd$
(2)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$
(3)　$|x+y|\leqq|x|+|y|$

(1)　$a>b>0$，$c>d>0$ より
$ac-bd>bc-bd=b(c-d)>0$　　よって　$ac>bd$

(2)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$
$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2$
$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2$
$=(ay-bx)^2\geqq0$
よって　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$
等号成立は　$ay=bx$　のときである．

(3)　$(|x|+|y|)^2-|x+y|^2$
$=x^2+2|x||y|+y^2-(x^2+2xy+y^2)$
$=2(|xy|-xy)\geqq0$
よって　$|x+y|^2\leqq(|x|+|y|)^2$
$|x+y|\geqq0$，$|x|+|y|\geqq0$　より　$|x+y|\leqq|x|+|y|$
等号成立は　$|xy|=xy$　より　$xy\geqq0$　のとき
つまり　$xy>0$ または $xy=0$ より　$x=0$ または $y=0$ または x，y が同符号のときである．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 (1)　$x>0$ のとき，$x+\dfrac{4}{x+1}$ の最小値を求めよ．

(2)　x^{11} を x^2+x+1 で割った余りを求めよ．

(1)　$x+\dfrac{4}{x+1}=x+1+\dfrac{4}{x+1}-1$

ここで $x>0$ より　$x+1>0$

よって，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$x+1+\frac{4}{x+1}-1\geqq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1=4-1=3$$

等号成立は　$x+1=\dfrac{4}{x+1}$　　$(x+1)^2=4$　　$(x-1)(x+3)=0$

$x>0$ より　$x=1$ のとき．

したがって，求める最小値は **3**　($x=1$ のとき)

(2)　x^{11} を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q(x)$ とすると，余りは $ax+b$ (a，b は実数) とおける．

このとき　$x^{11}=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$　……①

ここで，$x^2+x+1=0$ の虚数解の１つを ω とすると　$\omega^2+\omega+1=0$

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \qquad \omega^3-1=0 \qquad \text{よって} \quad \omega^3=1$$

①の両辺に $x=\omega$ を代入して

$$\omega^{11}=a\omega+b$$

$\omega^{11}=(\omega^3)^3\cdot\omega^2=\omega^2=-\omega-1$ より　$-\omega-1=a\omega+b$

a，b は実数より　$a=-1$，$b=-1$

したがって，求める余りは　$\boldsymbol{-x-1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　式と証明(1)

(1) $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{(x-\boxed{\text{イ}})(x+\boxed{\text{ウ}})}$ である.

(2) $a>0$, $b>0$ のとき $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ の最小値は $\boxed{\text{エ}}$ である.

(3) $x=1-\sqrt{7}\,i$ のとき, $x^3-4x^2+12x-15$ の値を求めたい. $x-1=-\sqrt{7}\,i$ よりこの式の両辺を2乗し, x について整理すると $x^2-\boxed{\text{オ}}x+\boxed{\text{カ}}=0$ であり, $x=1-\sqrt{7}\,i$ はこの式を満たす.

ここで $x^3-4x^2+12x-15=(x^2-\boxed{\text{オ}}x+\boxed{\text{カ}})(x-\boxed{\text{キ}})+\boxed{\text{ク}}$ であることより, $x^3-4x^2+12x-15=\boxed{\text{ケ}}$ である.

(1) $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x(x-1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{x(x+1)}$

$=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}$

$=\dfrac{\mathbf{3}}{(x-\mathbf{1})(x+\mathbf{2})}$

(2) $a>0$, $b>0$ であるから, 相加平均と相乗平均の関係より

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2=4$$

等号成立は $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$ 　 $a>0$, $b>0$ であるから $a=b$ のとき.

よって $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ の最小値は **4** である.

(3) $x-1=-\sqrt{7}\,i$ より $(x-1)^2=(-\sqrt{7}\,i)^2$ 　 $x^2-2x+1=-7$

よって $x^2-\mathbf{2}x+\mathbf{8}=0$

ここで $(x^3-4x^2+12x-15)\div(x^2-2x+8)$ を計算することにより,

$$x^3-4x^2+12x-15=(x^2-\mathbf{2}x+\mathbf{8})(x-\mathbf{2})+\mathbf{1}$$

$x=1-\sqrt{7}\,i$ のとき $x^2-2x+8=0$ であるから

$$x^3-4x^2+12x-15=\mathbf{1}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。